第 6 講　三角関数の極限，関数の連続

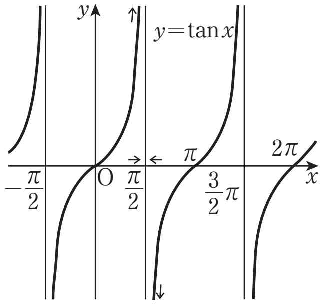
PART1 三角関数の極限

要点整理と公式

要点 ① 三角関数の極限

三角関数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ は，-1 から 1 の間のすべての値を周期 2π でくり返しとり，一定の値に近づくことはない。よって，$\lim_{x\to\infty}\sin x$，$\lim_{x\to\infty}\cos x$ は存在しない。

三角関数 $y=\tan x$ について，$y=\tan x$ のグラフにより



$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=$　　　，　$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=$

よって，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しない。

(ex) $\lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$，　$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$，　$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=$

要点 ② 関数の極限の性質

関数の極限について，次のことが成り立つ。

関数の大小関係と極限

(1)　$x=a$ の付近で，つねに $f(x)\leqq g(x)$ かつ

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ ならば $\alpha\leqq\beta$

(2)　$x=a$ の付近で，つねに $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ならば $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

(1)について，$x=a$ の付近で，つねに $f(x)<g(x)$，つまり $f(x)=g(x)$ となる x が存在しなかったとしても，必ずしも $\alpha<\beta$ とは限らず，$\alpha=\beta$ となることがある。

(ex) $f(x)=x^2$，$g(x)=x^2+x$ において，$x>0$ のとき，$x=0$ の付近でつねに $f(x)<g(x)$ であるが $\lim_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim_{x\to 0}g(x)=0$　　つまり，$\alpha=\beta$ である。

(1)，(2)については，$x\to\infty$，$x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

要点 ③ $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

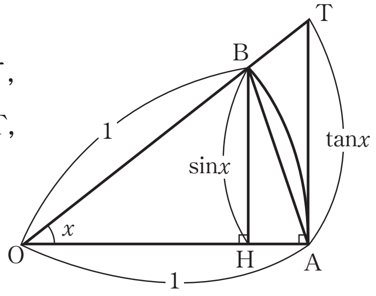
三角関数 $\sin x$ を含む極限について，次のことが成り立つ。ただし，角の単位は弧度法とする。

> **$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

このことを証明する。$x\to 0$ のときを考えるので，$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(i)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

中心が点 O，半径 1，中心角 x の扇形 OAB において，点 A における円 O の接線が直線 OB と交わる点を T，点 B から OA に下ろした垂線を BH とする。



面積について，△OAB ＜ 扇形 OAB＜ △OAT

つまり $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

すなわち $\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より，各辺 $\sin x$ で割ると $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to +0}\cos x=$ 　　より　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき

$x=-t$ とおくと　$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t}=1$

(i)，(ii)より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(ex) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ 　　$=$ 　　$=2$

1 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Point Pickup

$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用して極限を求める。

※$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ の□は，$x\to 0$ のとき □ $\to 0$ となる「　　　　」である必要がある。

第 6 講 PART1 確認問題

次の極限を求めよ。

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\boxed{オ}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

第 6 講　三角関数の極限，関数の連続

PART1 三角関数の極限

1 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

[解答]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$

（別解）(1)の結果より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}=1^2\cdot 4\cdot\frac{1}{1+1}=2$$

（別解）$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ より $1-\cos 2x=2\sin^2 x$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2

[解説]

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 1 \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{3}{2}$$

[A]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2

[正解] ウ：3，エ：4

[解説]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin 4x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

[B]　分母・分子を $\dfrac{\sin x}{x}$ の形に変形する。

3

[正解] オ：2

[解説]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{[C]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x} \quad \text{[D]}$$

$$=1\cdot\frac{2}{1} \quad \text{[E]}$$

$$=2$$

[C]　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

[D]　$\dfrac{\sin x}{x}$ の形を作る。

[E]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos 2x=\cos 0=1$

4

[正解] カ：1，キ：2

[解説]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)} \quad \text{[F]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \quad \text{[G]}$$

$$=1\cdot\frac{1}{1+1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

[F]　分母・分子に $1+\cos x$ をかける。

[G]　$\dfrac{\sin x}{x}$ の形を作る。